

IV – IMAGE D'UN INTERVALLE

1. Image d'un segment (intervalle fermé borné) par une fonction continue

Théorème admis	L'image par une fonction continue d'un segment est un segment
-----------------------	--

Autrement dit : Si f est continue sur l'intervalle $[a, b]$ alors il existe deux réels m et M tels que $f([a, b]) = [m, M]$ avec $m < M$

Définition d'un intervalle
 Soit I une partie de $\mathbb{R}$
 On dit que I est un intervalle si, et seulement si, pour tous réels x et y de I et tout réel z de $\mathbb{R}$
 Si z est compris entre x et y alors $z \in I$

2. Que vaut m et M ?

Distinguons trois cas :

1^{er} cas : f est croissante sur $[a, b]$

On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in [a, b]; a \leq x \leq b &\stackrel{f \text{ croissante}}{\Rightarrow} \forall x \in [a, b]; f(a) \leq f(x) \leq f(b) \\ &\Rightarrow \forall x \in [a, b]; f(x) \in [f(a), f(b)] \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } f([a, b]) \subset [f(a), f(b)]$$

$$\text{Montrons que : } [f(a), f(b)] \subset f([a, b])$$

$$\text{Soit } z \in [f(a), f(b)]$$

$$\text{On a : } \begin{cases} a \in [a, b] \\ b \in [a, b] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(a) \in f([a, b]) \\ f(b) \in f([a, b]) \end{cases}$$

Comme $f([a, b])$ est un intervalle et $f(a)$ et $f(b)$ sont deux éléments de $f([a, b])$ et $f(a) \leq z \leq f(b)$ alors $z \in [f(a), f(b)]$

$$\text{D'où } [f(a), f(b)] \subset f([a, b])$$

En conclusion :

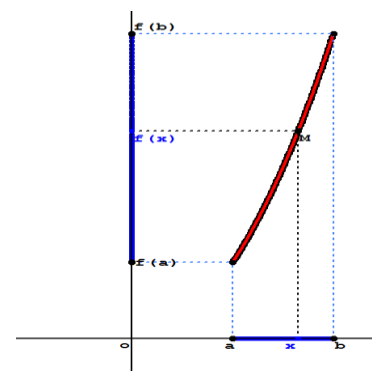
Si f est continue et croissante sur $[a, b]$ alors

$$f([a, b]) = [f(a), f(b)]$$

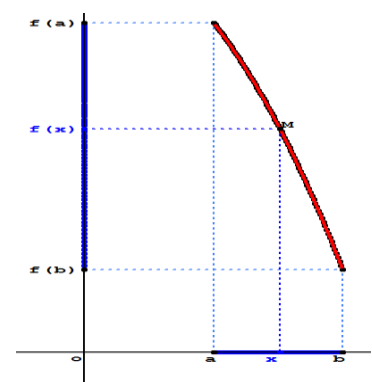
2^{ème} cas : f est décroissante sur $[a, b]$

Par un même raisonnement que dans le 1^{er} cas on démontre que :

$$f([a, b]) = [f(b), f(a)]$$



Fonction continue et croissante sur le segment $[a, b]$



Fonction continue et décroissante sur le segment $[a, b]$

3^{ème} cas : f n'est pas monotone sur $[a, b]$

On décompose $[a, b]$ en une réunion d'intervalle où f est monotone

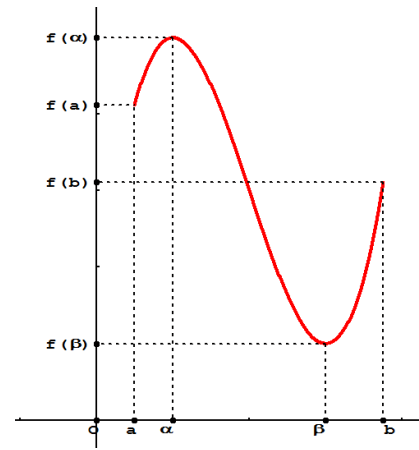
Dans le cas de figure ci – contre on a : $[a, b] = [a, \alpha] \cup [\alpha, \beta] \cup [\beta, b]$

$$\begin{aligned} f([a, b]) &= f([a, \alpha] \cup [\alpha, \beta] \cup [\beta, b]) \\ &= f([a, \alpha]) \cup f([\alpha, \beta]) \cup f([\beta, b]) \\ &= [f(a), f(\alpha)] \cup [f(\beta), f(\alpha)] \cup [f(\beta), f(b)] \end{aligned}$$

Remarquer que :

$$[f(a), f(\alpha)] \subset [f(\beta), f(\alpha)] \text{ et } [f(\beta), f(b)] \subset [f(\beta), f(\alpha)]$$

D'où : $f([a, b]) = [f(\beta), f(\alpha)]$



Dans les trois cas :

$$m = \min_{x \in [a, b]} f(x) : \text{valeur minimale de f sur } [a, b] \text{ et } M = \max_{x \in [a, b]} f(x) : \text{valeur maximale de f sur } [a, b]$$

Propriété	Si f est continue sur $[a, b]$ alors $f([a, b]) = [m, M]$ où m et M sont respectivement les valeurs minimale et maximale de f sur $[a, b]$
------------------	--

Exercice

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

Déterminer $f([-2, -1])$; $f([0, 1])$ et $f([-2, 2])$

Solution :

- Continuité de f**

La fonction f est une fonction rationnelle donc f est continue sur son domaine de définition qui est $\mathbb{R}$

- Monotonie de f**

$$\forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = \frac{x'(x^2 + 1) - (x^2 + 1)'x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

D'où le signe de $f'(x)$ est celui de $(1 - x^2)$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f'(x)	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

- Détermination de $f([-2, -1])$**

$$f([-2, -1]) = [f(-1), f(-2)] = \left[-\frac{2}{5}, -\frac{1}{2}\right] \text{ (car f est décroissante sur } [-2, -1])$$

- Détermination de $f([0, 1])$**

$$f([0, 1]) = [f(0), f(1)] = \left[0, \frac{1}{2}\right] \text{ (car f est croissante sur } [0, 1])$$

- Détermination de $f([-2, 2])$**

La fonction f n'est pas monotone sur l'intervalle $[-2, 2]$ d'où

$$f([-2, 2]) = \left[\min_{x \in [-2, 2]} f(x), \max_{x \in [-2, 2]} f(x) \right] = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

3. Image d'un intervalle



Activité1

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;1]$ par : $f(x) = x^2$

Nous allons montrer que : $f([0;1]) = [0;1]$

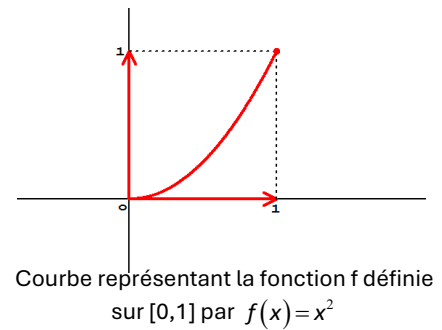
$$\forall x \in [0;1]; 0 \leq x \leq 1 \xRightarrow{f \uparrow \text{sur } [0;1]} f(0) \leq f(x) \leq f(1) \\ \Rightarrow f(x) \in [0;1]$$

D'où $f([0;1]) \subset [0;1]$

Montrons que : $[0;1] \subset f([0;1])$

$$\text{Soit } z \in [0;1]. \text{ Comme } \begin{cases} f(0) = 0 \in f([0;1]) \\ f(1) = 1 \in f([0;1]) \\ f(0) \leq z \leq f(1) \\ f([0;1]) \text{ est un intervalle} \end{cases} \quad \text{alors } z \in f([0;1])$$

Donc : $f([0;1]) = [0;1]$



Activité2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x}{x+1}$

Nous allons montrer que : $f([0, +\infty[) = [0;1[$

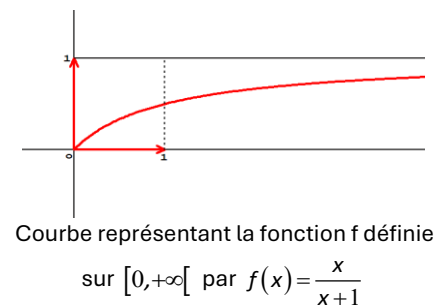
$$\text{On a : } \forall x \in [0, +\infty[; 0 \leq f(x) = 1 - \frac{1}{x+1} < 1$$

D'où $f([0, +\infty[) \subset [0;1[$

Réciproquement : Soit $\lambda \in [0;1[$ montrons que l'équation $f(x) = \lambda$ admet une solution dans $[0, +\infty[$

$$\begin{aligned} f(x) = \lambda &\Leftrightarrow \frac{x}{x+1} = \lambda \\ &\Leftrightarrow x = \lambda(x+1) \\ &\Leftrightarrow (1-\lambda)x = \lambda \\ &\stackrel{\lambda \neq 1}{\Leftrightarrow} x = \frac{\lambda}{1-\lambda} \in [0, +\infty[\end{aligned}$$

Donc : $f([0, +\infty[) = [0;1[$

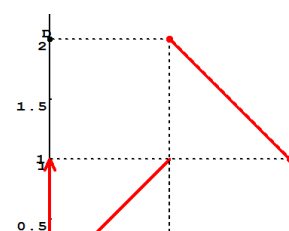


Théorème admis	Si f est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ alors l'image $f(I)$ de I par f est un intervalle
-----------------------	--

Remarque :

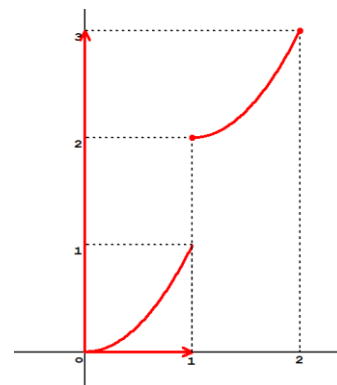
La condition f est continue sur I n'est qu'une condition suffisante (mais non nécessaire) pour que $f(I)$ soit un intervalle ;

En effet :



- La fonction f définie sur $[0;2]$ par :
$$\begin{cases} f(x) = x & \text{si } x \in [0;1[\\ f(x) = 3 - x & \text{si } x \in [1;2] \end{cases}$$
 n'est pas continue sur $[0;2]$ et $f([0;2]) = [0;2]$

- La fonction f définie sur $[0,2[$ par : $f(x) = 2E(x) + (x - E(x))^2$ n'est pas continue sur $[0,2[$ et $f([0,2[) = [0;1[\cup [1;3[$



4. Détermination de $f(I)$ où I est un intervalle

Théorème Admis

L'image d'un intervalle I par une fonction continue est un intervalle de même nature

Exemples :

L'intervalle I	L'image $f(I)$ de I dans le cas où f est continue croissante sur l'intervalle I	L'image $f(I)$ de I dans le cas où f est continue décroissante sur l'intervalle I
$[a, b]$	$[f(a), f(b)]$	$[f(b), f(a)]$
$[a, b[$	$\left[f(a), \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x) \right[$	$\left] \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x), f(a) \right]$
$]a, b]$	$\left] \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x), f(b) \right]$	$\left[f(b), \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) \right[$
$]a, b[$	$\left] \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x), \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x) \right[$	$\left] \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x), \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) \right[$

Dans le cas où I est un intervalle ouvert ou semi-ouvert a et b peuvent être des réels ou l'infini

Exercice

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- Etudier la continuité de f
- Déterminer $f([-2, -1])$; $f([-1, 1])$; $f([0, +\infty[)$ et $f(\mathbb{R})$

Solution :

1) - **Continuité de f sur $]-\infty, 0[$**

La fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme)
et en particulier sur $]-\infty, 0[$ d'où f est continue sur $]-\infty, 0[$

- **Continuité de f sur $[0, +\infty[$**

La fonction $x \mapsto x + 2$ est continue sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme)
et en particulier sur $[0, +\infty[$ d'où f est continue sur $[0, +\infty[$

- **Continuité de f en 0**

$$\text{On a : } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + 1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 2) = 2 \end{cases} \quad \text{d'où } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \text{ donc } f$$

n'est pas continue en 0

Conclusion : f est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $[0, +\infty[$

2) - **Détermination de $f([-2, -1])$**

La fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est décroissante sur $]-\infty, 0[$
d'où f est décroissante sur $]-\infty, 0[$ et comme $[-2, -1] \subset]-\infty, 0[$
alors $f([-2, -1]) = [f(-1), f(-2)] = [2, 5]$

- **Détermination de $f([-1, 1])$**

La fonction f n'est pas continue sur $[-1, 1]$

$$f([-1, 1]) = f([-1, 0[\cup [0, 1]) = f([-1, 0[) \cup f([0, 1])$$

Puisque f est décroissante sur $[-1, 0[$ et croissante sur $[0, 1]$

$$\text{alors } f([-1, 0[) = \left[\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), f(-1) \right] =]1, 2] \text{ et}$$

$$f([0, 1]) = [f(0), f(1)] = [2, 3] \text{ donc } f([-1, 1]) =]1, 3]$$

- **Détermination de $f([0, +\infty[)$**

$$f([0, +\infty[) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right] = [2, +\infty[\text{ (} f \text{ est continue et croissante)}$$

- **Détermination de $f(\mathbb{R})$**

$$f(\mathbb{R}) = f(]-\infty, 0[\cup [0, +\infty[) = f(]-\infty, 0[) \cup f([0, +\infty[)$$

$$f(]-\infty, 0[) = \left[\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right] =]1, +\infty[$$

$$f([0, +\infty[) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right] = [2, +\infty[$$

$$\text{Donc : } f(\mathbb{R}) = [2, +\infty[$$

Pour cela il suffit de décomposer l'intervalle I en une réunion d'intervalle sur lesquels f est continue et appliquer la propriété :
 $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

